Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za IX razred osnovne škole

1. Na dnu jezera postoji izvor koji svakog dana dopunjava jezero konstantnom količinom vode. Krdo od 193 žirafe popije vodu iz jezera za jedan dan, a krdo od 13 slonova za pet dana. Slon pije tri puta više vode nego žirafa. Koliko dana bi na jezeru mogla da pije jedna zirafa?

Rješenje: Označimo količinu vode koju popije jedna žirafa sa ž, količinu vode koju popije jedan slon sa s, količinu vode u jezeru sa j i količinu vode koja dopuni jezero za jedan dan sa i. Sada je:
$j + i = 193\cdot$ž
$j + 5i = 5 \cdot 13 \cdot s = 5 \cdot 13 \cdot 3\cdot$ž.
Iz ove dvije jednačine dobijamo da je $i = 0.5\cdot$ž, a $j = 192.5\cdot$ž. Ako jedna žirafa popije vodu iz jezera za k dana imamo da je $k\cdot$ž$= j + k \cdot i$, odnosno
$k\cdot$ž$= 192.5\cdot$ž $+k \cdot 0.5\cdot$ž. Dobijamo da je $k = 385$ dana. Dakle jedna žirafa na ovom jezeru bi mogla da pije 385 dana. □

2. Data je jednačina $5x + 3y = 2016$. Neka su $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ parovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju datu jednačinu. Izračunaj zbir
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Rješenje: Kako je $5x + 3y = 2016$, to je $5x = 2016 - 3y$, tj. $5x = 3(672 - y)$, pa je $x = 3k$, gdje je k neki prirodan broj. Sada je $15k = 3(672 - y)$, tj. $5k = 672 - y$, odakle je $y = 672 - 5k$. Kako je $x_n > 0$ i $y_n > 0$, to je $k > 0$ i $672 - 5k > 0$, pa je $1 \leq k \leq 134$. Dakle $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 3 + 6 + \cdots + 3 \cdot 134 = 3(1 + 2 + \cdots + 134) = 3 \cdot 67 \cdot 135 = 27135$. □

3. Na šahovskom turniru učestvovala su dva igrača iz grada A. Svaka dva igrača međusobno su odigrala tačno jedan meč (bez obzira da li su iz istog grada). Igrači iz grada A zajedno su osvojili 8 bodova, a svaki igrač iz grada B jednak broj bodova. U partiji šaha pobjednik dobija 1 bod, gubitnik 0 bodova, a ako je rezultat neriješen, svaki dobija 0.5 bodova. Koliko je igrača iz grada B moglo učestvovati u turniru?

Rješenje: Označimo sa n broj igrača iz grada B, a sa k broj bodova svakog igrača iz grada B. Ukupan broj igrača iz oba grada je $n + 2$. Pošto je svaki igrač igrao sa svakim tačno jednom, ukupan broj partija je $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Broj bodova svih igrača jednak je broju partija. Otuda,

$$\frac{(n + 2)(n + 1)}{2} = nk + 8$$

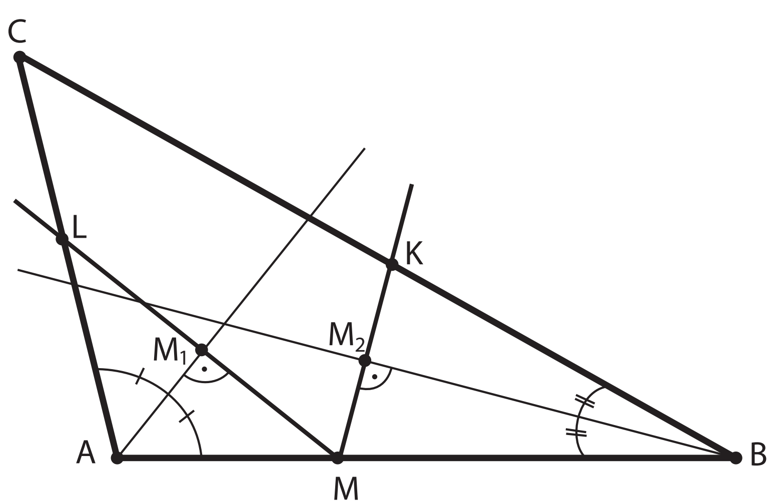
$$n^2 + 3n - 2nk = 14,$$

odnosno $n(n+3-2k) = 14$. Odatle, n mora biti djelilac broja 14.
1. Ako je $n = 1, 1+3-2k = 14$, pa je $k = -5$, što je nemoguće.
2. Ako je $n = 2, 2+3-2k = 7$, pa je $k = -1$, što je nemoguće.
3. Ako je $n = 7, 7+3-2k = 2$, pa je $k = 4$.
4. Ako je $n = 14, 1+3-2k = 1$, pa je $k = 8$.

Dakle, iz grada B su mogla učestvovati 7 ili 14 igrača. □

4. Dat je $\triangle ABC, |AB| = 8, |BC| = 16, |AC| = 10$. Na stranici AB odabrana je tačka M, tako da normala iz tačke M na simetralu $\angle BAC$ siječe stranicu AC u tački L, a normala iz tačke M na simetralu $\angle ABC$ siječe stranicu BC u tački K, pri čemu je $|CK| = 2|CL|$. Naći $|AM|$.

Rješenje: Posmatrajmo $\triangle AML$. Kako važe jednakosti $\angle LAM_1 = \angle M_1AM = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle LM_1A = \angle MM_1A$, a stranica AM_1 je zajednička stranica trouglova $\triangle ALM_1$ i $\triangle M_1AM$, zaključujemo da važi $\triangle AM_1L \cong \triangle AMM_1$. Iz podudarnosti slijedi da je $|AM| = |AL|$. Slično, uočavamo jednakosti $\angle MBM_2 = \angle M_2BK = \frac{\beta}{2}$ i $\angle BM_2M = \angle BKM_2$ i zajedničku stranicu BM_2, pa dobijamo podudarnost trouglova $\triangle BM_2K \cong \triangle BMM_2$, a otud slijedi jednakost $|MB| = |BK|$.
Uedimo oznake $|AM| = x$ i $|MB| = y$. Važe jednakosti: $x + y = 8$, $x + |LC| = |AL| + |LC| = 10$, $y + |CK| = |BK| + |CK| = 16$. Kako je i $|CK| = 2|CL|$ to je $16 - y = 2(10 - x)$. Rješavanjem sistema jednačina $x + y = 8$ i $16 - y = 2(10 - x)$ dobijamo da je $x = y = 4$. Dakle, $|AM| = 4$.



□