Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za VIII razred osnovne škole

1. Na teniskom turniru učestovalo je 16 igrača. Svaki od njih odigrao je po jednu partiju sa svakim od preostalih igrača. Na kraju turnina prvi teniser imao je x_1 pobjeda i y_1 poraza, drugi teniser x_2 pobjeda i y_2 poraza, ..., posljednji x_{16} pobjeda i y_{16} poraza. Nema neriješenih mečeva. Dokazati da važi:
a) $x_1 + x_2 + ... + x_{16} = y_1 + y_2 + ... + y_{16}$
b) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{16}}^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_{16}}^2$.

Rješenje: Svaki igrač odigrao je tačno 15 mečeva, tj. važi $x_i + y_i = 15$ za svako $i \in \{1, 2, ..., 16\}$. Na svakom meču pobijedio je tačno jedan teniser, pa je ukupna suma svih pobjeda svih tenisera jednaka ukupnom broju odigranih mečeva koji iznosi $\frac{(16-1)16}{2} = 120$. Dakle, važi i $x_1 + x_2 + ... + x_{16} = 120$.
Iz navedenih uslova dobijamo:
$y_1 + y_2 + ... + y_{16} = (15 - x_1) + (15 - x_2) + ... + (15 - x_{16}) = 16 \times 15 - 120 = 120$ čime je dokazano a).
b) ${y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_{16}}^2 = (15 - x_1)^2 + ... + (15 - x_{16})^2 =$
$= 225 - 30x_1 + {x_1}^2 + ... + 225 - 30x_{16} + {x_{16}}^2 = 16 \times 225 - 30(x_1 + ... + x_{16}) + {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{16}}^2 =$
$= 3600 - 30 \times 120 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{16}}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_{16}}^2$ $\square$

2. Odrediti sve moguće nenegativne realne brojeve a, b i c koji zadovoljavaju jednakost $a+b+c = 1$ i nejednakost $\sqrt{a} + \sqrt{bc} \geq 1$.

Rješenje: Iz prve relacije jasno je da je $a = 1 - b - c$, pa datu nejednakost možemo zapisati u sljedećem obliku: $\sqrt{1 - b - c} + \sqrt{bc} \geq 1$, tj. $\sqrt{1 - b - c} \geq 1 - \sqrt{bc}$. Kvadriranjem dobijamo:

$$1 - b - c \geq 1 - 2\sqrt{bc} + bc.$$

Nakon sređivanja, posljednju nejednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$0 \geq b - 2\sqrt{bc} + c + bc = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + bc.$$

Kako su b i c nenegativni brojevi to je desna strana gornje nejednakost nenegativna, pa važi: $0 \geq (b - c)^2 + bc \geq 0$, što je jedino moguće u slučaju kada je $\sqrt{b} - \sqrt{c} = 0$ i $bc = 0$ tj. kada je $b = c = 0$. Odatle imamo da je $a = 1$. Dakle, jedino rješenje je $a = 1, b = 0, c = 0$. $\square$

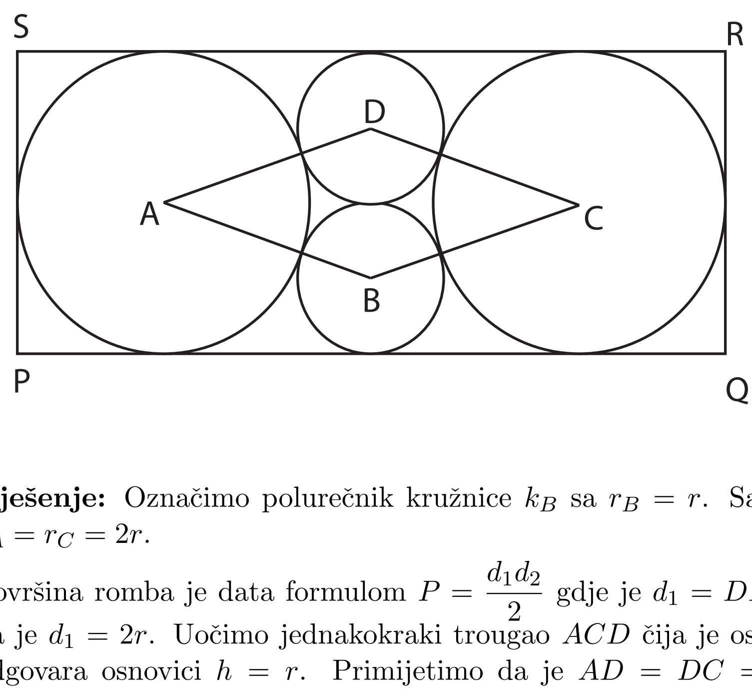
3. Dokazati da je razlika brojeva $a = 2^{2016}$ i $b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots 2016^2$ djeljiva sa 10.

Rješenje: Dovoljno je dokazati da se brojevi a i b završavaju istom cifrom - tada će se njihova razlika završavati nulom i biti djeljiva sa 10. Koristićemo jednostavnu činjenicu da prilikom množenja (i sabiranja) brojeva na vrijednost posljednje cifre rezultata utiču samo posljednje cifre činilaca (i sabiraka).

Prvih nekoliko stepena dvojke su 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... Lako uočavamo pravilnost: posljednje cifre stepena dvojke se ponavljaju 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... Pri tome je 2016 djeljivo sa 4, pa će posljednja cifra broja a biti 6.

Ako se broj završava sa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 onda se njegov kvadrat završava sa 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, redom. Dakle, zbir posljednjih cifara kvadrata brojeva proizvoljne desetice jednak je 0+1+4+9+6+5+6+9+4+1=45, pa je posljednja cifra tog zbira 5. Zbir kvadrata svih brojeva do 2010 je zbir kvadrata brojeva iz prvih 201 desetica, pa se završava cifrom 5 (jer se $201 \cdot 5$ završava cifrom 5). Zaključujemo da je posljednja cifra broja b posljednja cifra zbira broja 5 i posljednjih cifara kvadrata brojeva 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 i 2016: 5+1+4+9+6+5+6=36. Dakle i broj b se završava cifrom 6, pa je a-b djeljivo sa 10. □

4. U pravougaonik $PQRS$ su upisane kružnice k_A, k_B, k_C i k_D (sa centrima u A, B, C i D) kao na slici. Ako je površina romba $ABCD$ jednaka $\sqrt{2}$ kolika je površina datog pravougaonika?



Rješenje: Označimo poluréčnik kružnice k_B sa $r_B = r$. Sa slike vidimo da je i $r_D = r$ i $r_A = r_C = 2r$.

Površina romba je data formulom $P = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ gdje je $d_1 = DB$ i $d_2 = AC$. Sa slike je jasno da je $d_1 = 2r$. Uočimo jednakokraki trougao ACD čija je osnovica $d_2 = AC$, a visina koja odgovara osnovici $h = r$. Primijetimo da je $AD = DC = r + 2r = 3r$. Primjenjujući Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao dobijamo $\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 + h^2 = DC^2$. Uvrštavajući izraze za AC i h nakon sređivanja dobijamo da je $d_2 = 4r\sqrt{2}$. Dake, povrvsina romba ja $P = \dfrac{2r \cdot 4r\sqrt{2}}{2} = 4r^2\sqrt{2}$. Površina je po uslovu zadatka $\sqrt{2}$, pa je $r = \dfrac{1}{2}$.

Sa slike je jasno da je $PQ = r_A + AC + r_C = 2r + 4r\sqrt{2} + 2r = 4r(1+\sqrt{2})$ i $RQ = 2r_B + 2r_D = 4r$, pa je površina pravogaonika $PQ \cdot QR = 16r^2(1 + \sqrt{2}) = 4(1 + \sqrt{2})$. □